# Fundació Ferran Sunyer i Balaguer

## Convocatòries de 2012

fundació FERRAN SUNYER I BALAGUER
Institvt d'Estvdis Catalans

### Premi Ferran Sunyer i Balaguer de Matemàtiques

- Ofert a una monografia escrita en anglès que exposi els resultats més destacats d'una àrea de les matemàtiques en la qual s'hagin produït avenços recentment. L'obra ha de tenir un mínim de cent cinquanta fulls, no pot estar subjecta a copyright i no ha d'haver estat sotmesa a cap empresa editorial per a ser publicada.
- La dotació del premi és de 15.000 €, i l'obra guanyadora serà publicada en la col·lecció «Progress in Mathematics», de l'editorial Birkhäuser Verlag.

Termini per a la presentació de candidatures: 2 de desembre de 2011 a les 13 h.

### Premi Matemàtiques i Societat

- Ofert a autors de reportatges o activitats en qualsevol llengua, de caràcter generalista, sobre qualsevol aspecte de les matemàtiques (ensenyament, recerca, divulgació, presència en la societat), produïts als Països Catalans en els dotze mesos anteriors a la data de resolució.

Termini d'admissió de candidatures: 29 de febrer de 2012.

### Borses Ferran Sunyer i Balaguer

- Ofertes als millors projectes d'estudi o de recerca matemàtica relacionats amb la tesi doctoral. Els sol·licitants han de ser estudiants de doctorat de matemàtiques d'una universitat dels Països Catalans, en el tram final de la tesi doctoral.
- L'objectiu d'aquestes borses és reforçar la formació en recerca dels estudiants premiats mitjançant l'estada d'entre un i tres mesos d'estudi o de recerca en una institució fora de l'àmbit geogràfic de la universitat d'origen.

Les sol·licituds s'han de trametre abans del dia 28 de febrer de 2012 a les 14 hores. La resolució de la convocatòria es farà durant la segona quinzena de març de 2012.

Més informació: http://ffsb.iec.cat

## Guardonats en la convocatòria de 2011

• El Premi Ferran Sunyer i Balaguer de Matemàtiques ha estat atorgat a Jayce R. Getz, de la Universitat McGill, de Montreal, i Mark Goresky, de l'Institut d'Estudis Avançats, de Princeton, per la monografia titulada *Hilbert modular forms with coefficients in intersection homology and quadratic base change.*

• El Premi Matemàtiques i Societat ha estat atorgat al capítol «La revolució de l'astronomia» del programa «En guàrdia», dirigit per Enric Calpena i emès per Catalunya Ràdio.

• Les Borses Ferran Sunyer i Balaguer han estat atorgades a Francesc Fité Naya, per a dur a terme una estada de recerca de tres mesos al Robinson College, Universitat de Cambridge (Regne Unit), sota la tutela de Tim Dokchit-

ser; M. Elena Rodríguez Jorge, per a dur a terme una estada de recerca de dos mesos a l'Institut de Matemàtiques de la Universitat de Varsòvia (Polònia), sota la tutela de Jan Okniński; M. Pilar Silvestre Albero, per a dur a terme una estada de recerca de dos mesos a la Universitat de Karlstad (Suècia), sota la tutela de Viktor Kolyada, i a Daniel Ramos Guallar, per a dur a terme una estada de recerca de tres mesos a l'Institut Fourier, Universitat Joseph Fourier (França), sota la tutela de Gérard Besson.

Els premis i borses de la Fundació foren lliurats el passat 28 d'abril en l'acte de lliurament de premis i borses d'estudis de l'IEC.

## Ressenyes d'obres guardonades

### *Hilbert modular forms with coefficients in intersection homology and quadratic base change*, Jayce R. Getz i Mark Goresky. Premi FSB de Matemàtiques 2011

El resultat principal d'aquesta monografia és una generalització d'un dels resultats més rellevants en el camp de les varietats i formes modulars de Hilbert: el teorema de Hirzebruch-Zagier. Les formes modulars de Hilbert són generalitzacions de les formes modulars clàssiques, i han despertat un gran interès al llarg de les darreres dècades en la comunitat de teoria de nombres. Per exemple, ocupen un paper destacat en el programa de Langlands, un ambiciós entramat de conjectures entre les quals hi trobem, com a cas particular, la conjectura de Shimura-Taniyama, demostrada per Wiles el 1995 en el darrer pas de la prova del darrer teorema de Fermat. Això no obstant, l'interès de les varietas modulars de Hilbert no és exclusivament aritmètic; de fet, són objectes d'una estructura realment rica, i en el seu estudi hi conflueixen àrees com l'anàlisi, la topologia algebraica, la geometria algebraica o la teoria de representacions.

Començant pel cas clàssic, recordem que tota matriu $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ actua en el semiplà superior de Poincaré $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ per transformacions lineals fraccionàries: $z \mapsto \gamma z = \frac{az+b}{cz+d}$. El quocient $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}$, un cop compactificat adientment, és una superfície de Riemann que anomenem la *corba modular principal*.

De fet, és habitual considerar aquesta construcció per a certs subgrups de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Per a cada enter positiu $N$, $\Gamma_0(N)$ denota el conjut de matrius de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tals que la seva reducció mòdul $N$ és triangular superior. Aleshores $\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H}$ també es pot compactificar i dotar d'estructura de superfície de Riemann. És el que s'anomena la *corba modular de nivell* $N$, denotada habitualment per $X_0(N)$. Una *forma modular de nivell* $N$ és una funció holomorfa $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que $\omega_f = 2\pi i f(z)dz$ s'estén a una forma diferencial de $X_0(N)$. Una propietat molt important de les formes modulars és que són periòdiques i es poden desenvolupar en sèrie de Fourier. És a dir, admeten una expressió del tipus $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q_n(z)$, on $a_n \in \mathbb{C}$ són els coeficients de Fourier i $q_n(z) = e^{2\pi i n z}$.

Les varietats i formes modulars de Hilbert són generalitzacions de les construccions anteriors. Sigui $F$ un cos de nombres totalment real de grau $n$ amb anell d'enters $\mathcal{O}_F$ i nombre de classes estricte 1. Utilitzant que hi ha $n$ immersions de cossos de $F$ en $\mathbb{R}$ es pot fer actuar $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F)$ en $\mathcal{H}^n$: cada $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F)$ actua en la component $i$-èsima com $z \mapsto \frac{a_i z+b_i}{c_i z+d_i}$, on $a_i, b_i, c_i, d_i$ denoten les imatges de $a, b, c, d$ per a la $i$-èsima immersió de $F$ en $\mathbb{R}$. El quocient $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F)\backslash\mathcal{H}^n$ es pot compactificar i desingularitzar, i té estructura de varietat algebraica de dimensió $n$: és la *varietat modular de Hilbert* $X_0(\mathcal{O}_F)$. En particular, si $n = 1$ es recupera la corba modular principal, mentre que si $n = 2$ s'obtenen les *superfícies modulars de Hilbert*.

Les funcions holomorfes $f\colon \mathcal{H}^n \to \mathbb{C}$ tals que $\omega_f = (2\pi i)^n f(z_1, \ldots, z_n) dz_1 \cdots dz_n$ donen peu a una forma diferencial regular en $X_0(\mathcal{O}_F)$ s'anomenen *formes modulars de Hilbert sobre* $F$. També admeten desenvolupament en sèrie de Fourier, però aquest cop els coeficients estan indexats pels elements totalment positius de $\mathcal{O}_F$:

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_n a_n q_n(z_1, \ldots, z_n),$$

on $a_n \in \mathbb{C}$ són els coeficients de Fourier i $q_n(z_1, \ldots, z_n)$ és un producte d'exponencials.

El teorema de Hirzebruch-Zagier proporciona un mètode per a produir formes modulars clàssiques, a través d'una construcció geomètrica en superfícies modulars de Hilbert sobre cossos quadràtics reals. Més concretament, per $p$ un primer congruent amb 1 mòdul 4, Hirzebruch i Zagier van definir una família de subvarietats 1-dimensionals $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ de $X_0(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{p})})$. Aquestes subvarietats tenen dimensió real 2, i defineixen elements en el segon grup d'homologia singular $H_2(X_0(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{p})}))$ de la superfície $X_0(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{p})})$. En particular, per a tot $\beta \in H_2(X_0(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{p})}))$ el producte d'intersecció $\langle \beta, [Z_n]\rangle$ és un nombre enter.

El teorema de Hirzebruch-Zagier afirma que, per a tot $\beta \in H_2(X_0(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{p})}))$ la funció $\sum_{n\geq 0}\langle \beta, [Z_n]\rangle e^{2\pi i n z}$ és una forma modular clàssica de nivell $p$. Dit d'una altra manera, els enters $\{\langle \beta, [Z_n]\rangle\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ són els coeficients de Fourier d'una forma modular clàssica de nivell $p$ (de fet, i per ser més precisos, és una forma modular amb caràcter de conductor $p$).

Tal com els mateixos autors expliquen a la introducció de l'article, aquest resultat fou motivat per una observació de Serre i ha estat objecte de diverses generalitzacions i reinterpretacions. Per exemple, fou redemostrat pel guanyador de la Medalla Fields Richard Borcherds. També se n'han donat versions aritmètiques en treballs de matemàtics com Stephen Kudla i Michael Rapoport o Jan Bruinier, José Ignacio Burgos i Ulf Kühn.

En el treball de Jayce Getz i Mark Goresky, se'ns presenta una generalització del teorema de Hirzebruch-Zagier en una direcció diferent. Els autors parteixen d'una extensió quadràtica $L/E$, on $L$ és un cos totalment real de grau $2n$ sobre el cos $\mathbb{Q}$ dels nombres racionals, i introdueixen certs cicles en la varietat modular $2n$-dimensional $X_0(\mathcal{O}_L)$. El resultat fonamental del seu treball és la construcció d'una teoria d'intersecció adequada que els permet mostrar que els nombres d'intersecció d'aquests cicles poden interpretar-se com els coeficients de Fourier d'una forma modular de Hilbert sobre $E$.

Un dels punts clau d'aquesta construcció és que en lloc de treballar amb l'homologia singular de la varietat ambient, els autors utilitzen l'homologia d'intersecció. Aquesta teoria homològica va ser desenvolupada als anys setanta pel matemàtic Robert MacPherson i el mateix Mark Goresky i va ser dissenyada per a poder treballar amb espais singulars.

Més concretament, Getz i Goresky defineixen un subespai $IH_n^E(X_0(\mathcal{O}_L))$ del grup d'homologia d'intersecció $IH_n(X_0(\mathcal{O}_L))$ generat per classes pròpies per les correspondències de Hecke. També construeixen una família de correspondències de Hecke $\{T_n\}$ indexada per elements $n \in E^\times$ totalment positius. Una versió simplificada del resultat de Getz i Goresky diu que, per a qualsevol $\gamma \in IH_n^E(X_0(\mathcal{O}_L))$ i per a qualsevol $\beta \in IH_n(X_0(\mathcal{O}_L))$, la sèrie $\sum_n \langle \beta, T_n(\gamma)\rangle q_n$ és una forma modular, on $q_n$ és un producte explícit adequat de funcions exponencials.

La monografia està redactada de manera raonablement autocontinguda. En els primers capítols s'exposen, de manera concisa però prou completa, temes com ara les construccions clàssiques de Hirzebruch-Zagier, les teories d'homologia i cohomologia singular i d'intersecció, la integració de formes diferencials, les varietats i formes modulars de Hilbert o les correspondències de Hecke. Aquestes són algunes de les eines emprades en la construcció i demostració dels resultats originals de Getz i Goresky, que apareixen en els darrers capítols.

Xavier Guitart i Víctor Rotger
UPC

## «La revolució de l'astronomia». Premi Matemàtiques i Societat 2011

El Premi Matemàtiques i Societat de la Fundació Ferran Sunyer i Balaguer corresponent a l'any 2011 fou concedit al capítol «La revolució de l'astronomia» del programa «En guàrdia» de Catalunya Ràdio, emès el dia 4 de juliol de 2010. Els programes d'aquesta sèrie consisteixen en una tertúlia d'una durada aproximada d'una hora, amb la participació d'Enric Calpena, director, de Josep Maria Solé i Sabater, assessor sobre aspectes històrics, i d'un convidat especialista en el tema concret que aquell dia és objecte del programa. En el cas que ens ocupa, el convidat

vaig ser jo mateix. Uns dies abans el guionista es va posar en contacte amb mi per explicar-me de què es tractava. Em va dir que volien dedicar el programa a Copèrnic i a la revolució que va suposar el fet de considerar que la Terra girava entorn del Sol. Jo li vaig dir que per a explicar bé aquest canvi s'havia de parlar del que hi havia abans, és a dir, de la concepció de l'univers dels grecs i les teories de Ptolomeu, i també dels científics que van desenvolupar la idea copernicana: Galileu, Kepler i Newton. També em va dir que no es tractava que fes una exposició com una conferència, sinó que m'havia de limitar a respondre les preguntes que em faria el director del programa. Només amb aquest breu intercanvi previ d'idees, vaig anar a l'emissora a gravar el programa el dia convingut. Després de l'enregistrament, vaig sortir d'allà amb la sensació que la tertúlia havia sortit molt bé, amb molta «naturalitat», i que l'Enric Calpena s'havia preparat molt bé el tema, perquè havia sabut conduir l'entrevista sense sortir-se del guió en cap moment i tallar-me sense que es notés quan jo m'enrotllava massa. Resumint: crec que va quedar un programa interessant, adreçat al gran públic, que podeu escoltar íntegrament quan ho desitgeu a través del web de Catalunya Ràdio.

Joan Girbau
UAB

## Francesc Fité Naya, «Paritat del rang de superfícies abelianes isotípiques».

### Borsa Ferran Sunyer i Balaguer 2011

El dia 13 d'abril de 2011 vaig fer la defensa de la meva tesi, titulada *L-functions and Artin representations attached to twisted abelian varieties* i dirigida pel professor Joan-Carles Lario de la Universitat Politècnica de Catalunya. El dia 26 del mateix mes marxava cap a la Universitat de Cambridge per fer-hi una estada de recerca de tres mesos gràcies a una borsa de viatge de la Fundació Ferran Sunyer i Balaguer.

La meva tesi doctoral s'emmarca en el camp de la teoria de nombres i de la geometria aritmètica. Aquesta part de les matemàtiques s'ocupa de l'estudi dels punts de varietats algebraiques definits sobre cossos aritmèticament interessants (per exemple $\mathbb{Q}$ o el cos finit $\mathbb{F}_p$ de $p$ elements). És especialment interessant el cas d'una corba el·líptica $E$ (suposem definida sobre $\mathbb{Q}$), ja que el seu conjunt de punts racionals $E(\mathbb{Q})$ adquireix de manera natural una estructura de grup abelià. El teorema de Mordell-Weil assegura que aquest grup és finitament generat. No obstant això, l'estudi del seu rang és un problema obert. De fet, la conjectura de Birch i Swinnerton-Dyer pretén comprendre aquest rang en termes del nombre de punts $|E(\mathbb{F}_p)|$ de la corba el·líptica $E$ definits sobre $\mathbb{F}_p$, per a cada primer $p$.

Escrivim $L(E,s)$ per la funció $L$ de $E$, que és una funció analítica, construïda a partir del nombre de punts $|E(\mathbb{F}_p)|$ per a cada primer $p$. Més concretament, la conjectura de Birch i Swinnerton-Dyer afirma que el rang de $E(\mathbb{Q})$ coincideix amb l'ordre del zero de $L(E,s)$ en 1. Aquesta conjectura ha esdevingut un dels problemes oberts més importants de la teoria de nombres i, de fet, figura com un dels set problemes del mil·lenni. Tanmateix, està demostrat *mòdul 2*. En altres paraules, per una corba el·líptica definida sobre un cos de nombres $k$, els treballs de Tim i Vladimir Dokchitser demostren que la paritat del rang de $E(k)$ coincideix amb la paritat de l'ordre del zero de $L(E,s)$ en 1, si un assumeix la finitud del grup de Tate-Shafarevic.

A la meva tesi vaig estudiar relacions entre les funcions $L$ de varietats abelianes torçades. Les varietats abelianes són generalitzacions naturals de les corbes el·líptiques en dimensió superior i diem que dues varietats abelianes $A$ i $A'$ definides sobre un cos de nombres $k$ són torçades si esdevenen isògenes sobre una certa extensió finita de $k$. El tipus de relacions que s'obtenen entre les funcions $L(A,s)$ i $L(A',s)$ són exactament anàlogues a les que hom empra per a relacionar la paritat dels rangs de corbes el·líptiques torçades. Durant l'estada a la Universitat de Cambridge, sota la tutela del professor Tim Dokchitser, el principal objectiu és utilitzar

les relacions obtingudes a la tesi per a relacionar la paritat dels rangs de $A(\mathbb{Q})$ i $A'(\mathbb{Q})$.

No vull deixar de mostrar el més sincer agraïment a la Fundació Ferran Sunyer i Balaguer per haver-me ofert la possibilitat de treballar al costat del professor Dokchitser, així com per haver-me permès de realitzar una estada de tres mesos en un lloc tan emblemàtic per a la ciència i el coneixement en general com és Cambridge i la seva Universitat.

## Daniel Ramos Guallar, «$\kappa$-solucions del flux de Ricci en varietats amb singularitats còniques». Borsa Ferran Sunyer i Balaguer 2011

L'elecció del tema de tesi d'un mateix no sempre és fàcil ni immediata. En el meu cas, vaig acabar la carrera el 2006 i vaig entrar en el màster amb un projecte que, com succeeix a molts estudiants de tesi, no és el mateix tema en el qual he acabat treballant.

La meva tesi, que espero acabar en un termini no massa llarg, tracta del flux de Ricci i de varietats còniques. Vaig descobrir el flux de Ricci el 2007 en unes conferències a Granada, quan es va posar de moda. La història és prou coneguda: la conjectura de Poincaré era un problema topològic famós sobre varietats de dimensió 3 que datava de 1904 i que es resistia a ser demostrat amb les eines topològiques disponibles. La conjectura de geometrització de Thurston ho convertia en un problema de geometria diferencial, i el 1982 R. Hamilton va idear una eina, el flux de Ricci, que consisteix a deixar evolucionar la forma d'una varietat riemanniana (el tensor mètric) segons una equació de difusió anàloga a l'equació de difusió de la calor en una varietat. L'equació és $\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2Ric_{ij}$, on $g$ és el tensor mètric i $Ric$ és el tensor de Ricci, que codifica la curvatura i, per tant, depèn de les segones derivades de $g$. Estudiar aquesta EDP no és senzill, i molts analistes, com el mateix Hamilton, es varen dedicar a extreure propietats i interpretacions geomètriques. Però va ser un geòmetre riemannià, G. Perelman, qui el 2003 va aprofitar exitosament l'eina del flux de Ricci per a resoldre la conjectura de geometrització. La clau de Perelman, entre d'altres, va ser utilitzar eines geomètriques que difícilment sorgirien des d'un punt de vista de l'anàlisi (com ara geometria de comparació, successions de varietats, etc.) per a definir funcionals i quantitats que mesuren propietats geomètriques molt subtils, l'evolució de les quals determina el comportament qualitatiu de la varietat que evoluciona. La història és també coneguda per la seva part de romanticisme novel·lesc, atès que era un matemàtic que treballava en solitari, va resoldre un problema que portava un segle obert, va publicar a Internet de manera poc convencional, va refusar tot premi en reconeixement de la seva tasca i després va desaparèixer de la vida pública.

Fos com fos, les tècniques i les idees del flux de Ricci em van captivar i vaig començar, amb el meu director, a estudiar la complexa demostració de Perelman. El comportament del flux de Ricci en superfícies compactes va ser estudiat i establert pel mateix Hamilton. Tanmateix, les ulteriors tècniques de no-enfonsament ($\kappa$-noncollapsing) i l'estudi de les singularitats introduïdes per Perelman per al cas de dimensió 3 poden ser utilitzades per a simplificar significativament la demostració original de Hamilton en superfícies, com he vist en el meu treball.

I quan penses que t'estàs dedicant a un altre tema, recordes els cursos de doctorat que tenies oblidats. Un dels cursos que vaig fer el meu primer any va ser de 3-varietats i *orbifolds*. Els *orbifolds* són espais modelats localment com el quocient d'una varietat per l'acció d'un grup; en particular, un grup cíclic d'ordre $n$ produeix en una superfície un quocient que té forma de con amb angle $\frac{2\pi}{n}$. Una varietat cònica és anàloga però amb angles no necessàriament submúltiples de $2\pi$. Així, quan teníem els conceptes de flux de Ricci assimilats vam pensar que podríem adaptar les tècniques a *orbifolds* i a varietats còniques. Les tècniques de Perelman poseeixen certa robustesa que m'ha permès la generalització de la demostració del flux en superfícies a superfícies no llises sinó amb singularitats de tipus cònic.

L'estudi del flux en superfícies còniques està relacionat amb el problema del flux en superfícies llises no compactes. En aquest sentit, hi ha treballs sobre existència i unicitat de flux en $n$-varietats completes no compactes assumint certes fites per a la curvatura. Fent servir aquests resultats, L. Bessières, G. Besson i S. Maillot van ser capaços de dur a terme una prova anàloga a la geometrització de Perelman per al cas de 3-varietats completes no compactes, amb certes hipòtesis addicionals de geometria controlada (curvatura seccional afitada i radi d'injectivitat minorat) i de curvatura escalar uniformement minorada ($R \geq c > 0$). El resultat és una descomposició de la varietat en suma connexa de $S^2 \times S^1$ i varietats esfèriques. Aquest resultat va encaminat a una uniformització de les 3-varietats no compactes.

Recentment m'ha estat concedida una borsa de la Fundació Ferran Sunyer i Balaguer amb l'objectiu de fer una estada de tres mesos a l'Institut Fourier de Grenoble, França, sota la supervisió de Gérard Besson. Allà espero analitzar el treball de Besson i els seus col·laboradors i estudiar els casos que no satisfan les hipòtesis addicionals que ells requereixen, adaptant les tècniques que ja he utilitzat en el cas compacte.

El flux de Ricci, i en general els fluxos geomètrics, s'han convertit en un camp de recerca propi amb molts investigadors que hi treballen. Això d'una banda fa que hi hagi multitud de seminaris, resultats a l'abast, i línies obertes per a investigar; però d'altra banda fa que la recerca sigui competitiva i que les idees d'un ja les hagi tingut un altre. En qualsevol cas, la diversitat de tècniques i la quantitat de branques que esperen introduir aquests resultats fan que sigui un camp interessant per a posar-s'hi.

## M. Elena Rodríguez-Jorge, «Semigrupos que satisfacen ciertas identidades».

### Borsa Ferran Sunyer i Balaguer 2011

Sóc llicenciada en matemàtiques per la Universitat de La Laguna (Tenerife, Illes Canàries), on vaig estudiar la llicenciatura entre setembre de 2002 i juny de 2006. El setembre de 2006 em vaig traslladar a Barcelona per cursar el màster oficial de Matemàtica Avançada de la Universitat Autònoma de Barcelona, i fer el doctorat a continuació. El juliol de 2007 vaig presentar el treball de fi de màster, titulat «Anells zip», sota la direcció del professor Ferran Cedó, en el qual es recopilen molts dels resultats coneguts, no només sobre anells zip, sinó també sobre anells relacionats, com ara els anells amb la condició de Beachy-Blair o els anells amb condicions de cadena sobre els anul·ladors, entre d'altres. Així, el setembre de 2007 vaig començar els estudis de doctorat pròpiament dits sota la direcció del professor Cedó, dins el grup de teoria d'anells de la Universitat Autònoma de Barcelona. Després d'una mica més de tres anys dedicats íntegrament a la investigació i amb la tesi pràcticament acabada, vam decidir que era el moment adequat per a fer una estada de recerca a l'estranger, on podria treballar en altres línies de recerca i col·laborar amb matemàtics de renom.

Durant els mesos d'abril i maig de 2011 vaig fer una estada d'investigació a l'Institut de Matemàtiques de Varsòvia (Polònia), sota la supervisió del professor Jan Okniński, expert reconegut en àlgebra, especialment en les àrees d'anells no commutatius, teoria de semigrups i teoria de matrius. L'objectiu principal de l'estada sempre va ser aprendre el màxim possible sobre algunes de les línies de recerca en les quals es treballa actualment en aquest Institut.

El projecte de recerca triat per a desenvolupar durant l'estada va ser l'estudi de semigrups de matrius que satisfan certes identitats. Més concretament, l'objectiu de la investigació fou caracteritzar els semigrups de matrius que satisfan una identitat de la forma

$$Z_m(x_1, \ldots, x_m) = W(x_1, \ldots, x_m)$$

per a algun $m \geq 2$, on $W(x_1, \ldots, x_m)$ és una paraula en les lletres $x_1, \ldots, x_m$ i $Z_m(x_1, \ldots, x_m)$ denota la paraula Zimin de grau $m$. Les paraules Zimin es defineixen recursivament de la manera

següent:

$$Z_1(x_1) = x_1,$$
$$Z_{m+1}(x_1, \ldots, x_{m+1}) =$$
$$= Z_m(x_1, \ldots, x_m) x_{m+1} Z_m(x_1, \ldots, x_m).$$

Aquest problema té relació amb el problema de Burnside. El primer que ens vam plantejar va ser el cas particular de semigrups completament zero simples. Sabem que aquests semigrups són isomorfs a semigrups de Rees de la forma $S = M(G, X, Y, P)$ on $G$ és un grup, $X$ i $I$ són conjunts no buits i la *matrix sandwich* $P$ és una matriu de mida $|I| \times |X|$ amb entrades a $G$ i que no té cap fila ni columna nul·la. En aquest cas, el problema es redueix a caracteritzar els grups $G$ que satisfan aquesta identitat i trobar propietats sobre les matrius sandvitx $P$ perquè els semigrups $S$ satisfacin la identitat, suposant que el grup $G$ la satisfà. En aquests mesos, hem aconseguit petits avenços sobre això.

Des del punt de vista de les matrius sandvitx, sabem que si $G$ satisfà una identitat equilibrada $Z_m(x_1, \ldots, x_m) = W(x_1, \ldots, x_m)$, és a dir, els graus de cadascuna de les variables $x_i$ a $Z_m$ i $W$ coincideixen, llavors, si $W$ és de la forma $(*)$, és a dir, $W \equiv x_1 x_{j_1} x_1 \ldots x_1 x_{j_{2^{m-1}+1}} x_1$ (denotem $u \equiv v$ quan les paraules $u$ i $v$ són idèntiques lletra a lletra) amb $j_k \in \{2, \ldots, m\}$ per a tot $1 \leq k \leq 2^{m-1} + 1$, tenim que qualsevol matriu sandvitx $P$ (que no tingui cap fila ni columna nul·les) és vàlida. No obstant això, si la paraula $W$ no és de la forma $(*)$, llavors $P$ no pot tenir cap entrada nul·la i, a més, per a tot $(x, y) \in X \times I$, es compleix que $p_{ix}^n = 1$, on $n \leq 2^{m-1} - 1$, és a dir, les entrades de $P$ pertanyen a un subgrup periòdic de $G$ d'ordre fitat. D'altra banda, en l'estudi de les identitats balancejades de paraules Zimin en grups, el resultat més important es deu a Sapir, que va demostrar que si un grup $G$ satisfà una identitat balancejada de la forma $Z_m = W$, llavors $G$ és, almenys, $(m-1)$-nilpotent. En les últimes setmanes d'estada, vam poder demostrar que el recíproc no és cert. Si bé, per a $m = 2$, un grup $G$ satisfà una identitat balancejada de la forma $Z_3 = W$ si i només si $G$ és 2-nilpotent, es demostra que per a $m = 4$, el grup lliure 3-nilpotent no satisfà cap identitat no trivial de la forma $Z_4 = W$. Després d'estudiar moltes de les possibles paraules $W$ per a $m = 4$, tot sembla indicar que poc més es pot dir, en general, dels grups que satisfan una identitat balancejada de la forma $Z_4 = W$.

A partir d'aquí, el següent pas és plantejar el problema en semigrups de matrius arbitràries. Actualment seguim treballant en la caracterització dels semigrups que satisfan una identitat de la forma $Z_m = W$ per a algun $m \geq 2$ i en altres preguntes transversals que se'ns han anat acudint al llarg de l'estada. Gràcies a aquest projecte he pogut familiaritzar-me amb molts conceptes de teoria de grups, especialment aquells relacionats amb grups nilpotents i periòdics, ja que tenen un paper important en el nostre problema. També m'he familiaritzat amb conceptes de teoria de semigrups, com la descomposició d'aquests en components uniformes, el càlcul i propietats de les clausures completament zero simples (en la topologia de Zariski), etc. Tot això no és més que una petita part del que he experimentat i après en aquests mesos a Varsòvia. Durant l'estada vaig tenir també l'oportunitat de participar activament en el seminari del grup d'àlgebra, on vaig exposar part dels resultats de la meva tesi. Aquest seminari em va resultar molt enriquidor de cara a conèixer nous problemes oberts en els quals poder seguir desenvolupant la meva activitat investigadora en el futur, després d'acabar el doctorat.

Per a dur a terme aquest projecte em fou concedida una beca de mobilitat de la Fundació Ferran Sunyer i Balaguer, la qual agraeixo.

## Maria Pilar Silvestre i Albero, «Desigualtats de Sobolev i isocapacitàries, i la seua optimalitat». Borsa Ferran Sunyer i Balaguer 2011

Abans de començar vull enviar la meua salutació més cordial a tots els lectors i interessats pel món fascinant de les matemàtiques. També vull agrair a tots els que contribueixen, encara que siga de manera molt simbòlica, a fer possible l'estudi i la recerca en aquesta disciplina.

Sóc Maria Pilar Silvestre i Albero, natural de Banyeres de Mariola, un poble de l'interior nord d'Alacant. Aquest any 2011, la Fundació Ferran Sunyer i Balaguer m'ha atorgat una borsa de viatge per a fer estudis doctorals/postdoctorals a l'estranger. Abans d'explicar quin estudi pretenc dur a terme allà, explicaré quina ha estat la meua trajectòria professional.

Pràcticament tota la meua formació inicial la vaig fer a Alacant amb l'ajuda i motivació d'alguns dels professors de la llicenciatura, i amb el recolzament dels meus pares i germans. Sóc llicenciada en matemàtiques per la Universitat d'Alacant.

Quan vaig acabar la llicenciatura vaig haver de trasladar-me a la Universitat de Murcia per cursar el programa de doctorat en Matemàtiques. Allí vaig obtenir el Diploma d'Estudis Avançats en la branca d'Anàlisi Funcional, amb la màxima qualificació. Tot i que allà vaig començar una tesi doctoral, no la vaig acabar per múltiples raons.

Des de fa quasi tres anys sóc professora ajudant del Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi de la Universitat de Barcelona. Guanyar aquesta posició m'ha enriquit molt com a persona, i com a professional de les matemàtiques. La decisió de trasladar-me a un lloc completament desconegut per mi fou molt difícil, i els primers mesos, podríem dir que el primer any, fou dur i amb molts moments de soledat, moments força habituals en la vida d'un matemàtic. No obstant això, eixa decisió arriscada m'ha aportat moltes satisfaccions i m'ha permès començar de nou la tesi doctoral de la mà de dues grans persones, el catedràtic d'Anàlisi de la UB, el doctor Joan Cerdà, i el pofessor titular de la UAB, el doctor Joaquim Martín. Aprofite aquest escrit per expresar el meu agraïment més sincer als dos.

Una de les meues il·lusions sempre ha estat poder arribar a ser doctora en Matemàtiques, i espere que en un futur proper puga obtenir el títol de doctora en Ciències Matemàtiques de la Universitat de Barcelona. Mai m'hagués pensat que arribaria a fer la tesi doctoral a Catalunya però, si Déu vol i tot el camí va per la bona senda, el meu esforç i dedicació, així com el recolzament i guia dels meus directors, em duran a la defensa.

En teoria del potencial, s'entén per *capacitat* una funció de conjunt creixent amb menys propietats que les d'una mesura d'un conjunt. Un exemple clàssic de capacitat el trobem a l'electrostàtica. Siga $K \subset \mathbb{R}^3$ un conductor. Considerem una distribució de càrrega en $K$ i deixem que es moga fins arribar a l'equilibri. Siga $\mu$ la distribució d'equilibri. El potencial newtonià de la mesura $\mu$ pren valor constant $V$ en $K$, i la capacitat de Wiener de $K$ és

$$C(K) = \frac{\mu(K)}{V} = \\ = \left\{\|\nabla f\|_2^2;\, 0 \le f \le 1,\, f = 1 \text{ en } K\right\}.$$

Si pensem que la frontera de $K$ i una esfera que conté a $K$ són les plaques del condensador, aleshores fent tendir a infinit el radi de l'esfera, obtenim un condensador ideal, i la capacitat de Wiener ha de ser entesa com la capacitat d'eixe condensador ideal. Un altre exemple força conegut de capacitat és el de la capacitat analítica que es relaciona amb el problema de les singularitats evitables.

La meua tesi doctoral té per objectiu estudiar les propietats d'espais capacitaris —espais funcionals modelats sobre espais de capacitat en comptes d'estar definits sobre espais de mesura— en relació amb propietats d'immersió de Sobolev.

En un primer moment, s'estudiaren les propietats topològiques i analítiques dels espais capacitaris, cosa que va permetre l'estudi de la teoria d'interpolació sobre espais de capacitat.

En el passat més proper he estudiat les desigualtats isocapacitàries clàssiques i, amb la guia dels meus directors, hem estès part dels resultats més moderns. Concretament a [CMP] presentem una desigualtat integral que relaciona la capacitat del conductor associat amb una funció Lipschitz amb la mida del gradient de la fun-

ció, és a dir, amb la quasi-norma del gradient de la funció. Aquesta estimació dóna una caracterització de desigualtats de tipus Sobolev envoltant dues mesures, condicions necessàries i suficients per a desigualtats de tipus Sobolev isocapacitàries, i millores en la integrabilitat de funcions Lipschitz.

El professor Viktor Kolyada, de la Universitat de Karlstad (Suècia), té resultats força interessants de tipus Sobolev i d'estimacions de la transformada de Fourier en espais de Sobolev (vegeu [K,K1]). En particular, ha estudiat en [KL] inclusions d'espais de Besov en casos límits, així com teoremes d'inclusió i estimacions de la transformada de Fourier per a funcions en l'espai fraccional anisotròpic de Sobolev-Liouville (vegeu [K2]).

Del 15 d'agost al 17 d'octubre marxaré, finançada per la Fundació Ferran Sunyer i Balaguer, a la Universitat de Karlstad per aprendre de l'experiència del professor Viktor Kolyada. Pretenc entendre els seus estudis, conèixer els resultats més actuals i els problemes oberts en aquesta branca de la mà d'un matemàtic excel·lent. A més, com a segon objectiu, m'he plantejat intentar estendre algunes de les desigualtats isocapacitàries que es coneixen per les $p$-capacitats de Maz'ya, així com estudiar-ne l'optimització.

### Referències


[CMP] Cerdà, J.; Martín, J.; Silvestre, P. *Conductor Sobolev type estimates and isocapacitary inequalities*, preprint.

[K] Kolyada, V. I. «On an embedding of Sobolev spaces», *Mat. Zametki*, 54:3 (1993), 48–71. Traducció anglesa a *Math. Notes*, 54 (1993).

[K1] Kolyada, V. I. «Estimates of Fourier transforms in Sobolev spaces», *Studia Math.*, 125:1 (1997), 67–74.

[K2] Kolyada, V. I. «Embeddings of fractional Sobolev spaces and estimates for Fourier transformation» (en rus) *Mat. Sb.*, 192:7 (2001), 51–72. Traducció anglesa a *Sb. Math*, 192:7-8 (2001), 979–1.000.

[KL] Kolyada, V. I., Lerner, A. K. «On limiting embeddings of Besov spaces», *Studia Math.* 171:1 (2005), 1–13.


# Parlem de llibres

## Què en sabem, del pensament i de la matemàtica grega?

Fa un parell d'anys em van demanar que obrís un cercle de conferències de la Facultat de Filosofia dedicades al pensament grec, adreçades a filòsofs, que parlaven de la matemàtica grega. Em vaig trobar, doncs, l'estiu de 2009, a Tamariu, rellegint textos de Plató, d'Aristòtil, de Procle, de Pappos, i també textos de filosofia i matemàtica grega.

Curiosament, ara fa dos mesos, a l'Ateneu barcelonès es va presentar la traducció catalana d'un clàssic de la filosofia grega antiga — dels «presocràtics», encara que l'autor refusava aquesta denominació—; em refereixo a *L'aurora de la filosofia grega*,[1] de John Burnet que, amb Alfred Edward Taylor, inicià el que es coneix com l'escola escocesa de filosofia grega.

És d'algun d'aquests textos que us voldria parlar en aquest «Parlem de llibres».

Em vaig trobar, doncs, rellegint *The greeks. Crucible of civilizations*[2] de Paul Cartledge. És un llibre que la Margarida i jo vàrem descobrir precisament quan fèiem la ruta del Peloponès, en automòbil. És una d'aquestes petites joies de la divulgació de la cultura que en podríem dir «britànica». Mostra un gran coneixement de la matèria i alhora una enorme capacitat de síntesi i una simplicitat expositiva que amaga, de manera aparent, la profunditat del missatge. A través

[1] Col·lecció «Akademia». Barcelonesa d'Edicions. Barcelona, 2010.
[2] Traducció castellana *Los griegos*. Crítica. Barcelona, 2001.